

NOTIZEN

On the Trapping of Magnetic Flux by Superconducting Toroids

By GERHART LÜDERS

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen
(Z. Naturforsch. 17 a, 181—182 [1962]; eingegangen am 13. Januar 1962)

When a doubly connected piece of superconducting material is cooled down below the transition temperature in the presence of an external magnetic field a magnetic flux is trapped by the superconductor¹. The trapped flux [or rather fluxoid; cf. Eq. (5) below], Φ , is an integral multiple,

$$\Phi = n \Phi_0, \quad (1)$$

of the quantity $\Phi_0 = h c / 2 e$. (2)

The theory of this effect [i. e. of the validity of Eq. (1)] has been given by several authors². In the present note we wish to discuss how the "fluxoid quantum number", n , in Eq. (1) might be determined by the external magnetic field, $\mathbf{H}_{\text{ext}}$.

For a complete theory an understanding would be needed of the transition between normal and superconducting state which is not available. We shall, instead, assume that the decision between the various possible values of n is made when the specimen as a whole is already in its superconducting state but when the penetration depth is still big compared with its linear dimensions. The validity of this assumption will presumably depend upon the pace of cooling; it might break down for too big pieces of superconducting material. Once the decision on the fluxoid quantum number has been made it stays fixed under further cooling³.

Our considerations shall be based upon the LONDON-GINZBURG-LANDAU theory of superconductivity. Consequently they are more model dependent than the proof of Eq. (1) for thick superconductors. Magnetic field, $\mathbf{H}$, and electric current density, $\mathbf{j}$, (with vanishing normal component on the surface of the superconductor) are related by the MAXWELL equation,

$$\text{curl } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

and the LONDON equation,

$$\mathcal{A} c \text{ curl } \mathbf{j} = -\mathbf{H}. \quad (4)$$

The latter equation is valid only inside the superconductor. The quantum number n occurs in the fluxoid equation⁴,

$$\Phi \equiv \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} + \mathcal{A} c \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = n \Phi_0; \quad (5)$$

here the line integral has to be taken along a curve in the superconductor embracing the tunnel and the surface integral goes over a surface spanned by this curve.

For the purpose of solving Eqs. (3) – (5) we expand both $\mathbf{H}$ and $\mathbf{j}$ with respect to descending powers of $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^{(0)} + \mathbf{j}^{(1)} + \dots, \quad (6)$$

$$(\mathbf{H}^{(n)}, \mathbf{j}^{(n)}) \propto \mathcal{A}^{-n} \quad \text{and put}$$

$$\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}_{\text{ext}}. \quad (7)$$

From Eq. (3) one immediately concludes

$$\mathbf{j}^{(0)} = 0 \quad (8)$$

whereas $\mathbf{j}^{(1)}$ (with vanishing normal component) is to be determined from

$$\mathcal{A} c \text{ curl } \mathbf{j}^{(1)} = -\mathbf{H}_{\text{ext}}, \quad (9 a)$$

$$\mathcal{A} c \oint \mathbf{j}^{(1)} d\mathbf{r} = n \Phi_0 - \int \mathbf{H}_{\text{ext}} d\mathbf{f}, \quad (9 b)$$

$$\text{div } \mathbf{j}^{(1)} = 0. \quad (9 c)$$

It is evident how higher order terms in Eq. (6) can in principle be obtained. Now we assert that actually that value of n will occur which leads to minimum free energy of the superconductor in the external magnetic field. If the penetration depth is big compared with the linear dimensions of the superconductor the free energy, F , apart from a constant is only kinetic energy of the superconducting electrons,

$$F \approx \text{const} + \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \mathbf{j}^{(1)2} d^3 \mathbf{r}, \quad (10)$$

whereas the magnetic energy [being proportional to a volume integral of $(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{\text{ext}})^2$] can be neglected. The volume integral in Eq. (10) has to be extended over the interior of the superconductor. With $\mathcal{A}$ sufficiently big the difference of the free energy for different values of the fluxoid quantum number becomes very small; this observation might be regarded as an argument in favor of our assumptions.

As a simple practical example we treat the case of a hollow superconducting cylinder (r_1 = radius of the

¹ B. S. DEEVER and W. M. FAIRBANK, Phys. Rev. Letters 7, 43 [1961]. — R. DOLL and M. NÄUBAUER, Phys. Rev. Letters 7, 51 [1961].

² N. BYERS and C. N. YANG, Phys. Rev. Letters 7, 46 [1961]. — J. M. BLATT, Phys. Rev. Letters 7, 82 [1961]. — J. BARDEEN, Phys. Rev. Letters 7, 162 [1961]. — J. B. KELLER and B. ZUMINO, Phys. Rev. Letters 7, 164 [1961]. — W. BREINIG, Phys. Rev. Letters 7, 337 [1961]. — A. BOHR and B. R. MOTTOLSON, Phys. Rev., to be published.

³ This follows from the acceleration equ. $(\partial/\partial t)(\mathcal{A} \mathbf{j}) = \mathbf{E}$; for a different argument cf. KELLER and ZUMINO².

⁴ This equation has been derived by KELLER and ZUMINO on the basis of the LANDAU-GINZBURG theory. That

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} + \mathcal{A} c \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}$$

is independent of the particular curve is a consequence of Eq. (4).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

inner surface, r_2 =radius of the outer surface) in a homogeneous external magnetic field parallel to the axis of the cylinder. The electric current flows on circles in planes perpendicular to the axis of the cylinder. With r as the radius of such a circle we obtain from Eq. (9 b)

$$2 \pi r A c j^{(1)}(r) = n \Phi_0 - \pi r^2 H_{\text{ext}}. \quad (11)$$

This solution also satisfies Eqs. (9 a) and (9 c). Calculation of F according to Eq. (10) shows that the special choice, n , for the fluxoid quantum number will lead to minimum free energy if

$$(n - \frac{1}{2}) \Phi_0 < \pi r^2 H_{\text{ext}} < (n + \frac{1}{2}) \Phi_0. \quad (12)$$

At the bounds of this inequality the actual value of n will jump rather discontinuously by one unit. The radius, $\bar{r}$, in Eq. (12) is defined by

$$\bar{r}^2 = (r_2^2 - r_1^2) / 2 \ln(r_2/r_1); \quad (13)$$

it is easily shown that

$$r_1 \leq \bar{r} \leq r_2. \quad (14)$$

If the cylinder is tilted with respect to the direction of the external field by an angle α the quantity H_{ext} in Eq. (12) has to be replaced by $H_{\text{ext}} \cos \alpha$.

The author would like to acknowledge a clarifying discussion with F. HUND.

Zur Quantisierung des magnetischen Flusses in supraleitenden Zylindern

VON WOLFGANG WELLER

Institut für theoretische Physik der Universität Leipzig
(Z. Naturforschg. 17 a, 182—183 [1962]; eingegangen am 29. Januar 1962)

Die Quantisierung des magnetischen Flusses in einem supraleitenden Hohlzylinder wird im Rahmen der phänomenologischen Theorie von GINSBURG und LANDAU diskutiert.

Kürzlich wurde von DEEVER und FAIRBANK¹ und von DOLL und NÄBAUER² über Experimente berichtet, bei denen der eingefrorene magnetische Fluß gemessen wurde, der von einem supraleitenden Hohlzylinder umschlossen wird. Die Experimente ergaben, daß der Fluß in ganzzahligen Vielfachen von $h c / 2 e$ quantisiert ist. Diese Erscheinung ist schon von LONDON vorausgesagt worden, jedoch sollte die Einheit des Flusses $h c / e$ sein. Das Problem liegt im Auftreten der doppelten Elementarladung $2 e$. BYERS und YANG³, ONSAGER⁴ und BLATT⁵ bringen die Verdopplung der Elementarladung mit der Interpretation der Supraleitung als BOSE-Kondensation von Elektronenpaaren in Verbindung.

Hier soll die Quantisierung des magnetischen Flusses auf Grund der phänomenologischen Theorie von GINSBURG und LANDAU⁶ untersucht werden. Das ist deshalb von Interesse, da GORKOV⁷ diese phänomenologischen Gleichungen aus einer mikroskopischen Theorie vom Typ der von BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER⁸ diskutierten abgeleitet hat. Die Ableitung ergibt, daß in den phänomenologischen Gleichungen die doppelte Elementarladung $e^* = 2 e$ an die Stelle der von GINSBURG und LANDAU⁶ ursprünglich vorgeschlagenen einfachen Elementarladung tritt. Der physikalische Grund dafür ist offensichtlich in der BOSE-Kondensation von Elektronenpaaren bei der Supraleitung zu finden.

Die phänomenologische Theorie von GINSBURG und LANDAU wird durch die Gleichungen^{6, 7}

$$\frac{1}{2m} \left(-i \hbar \text{grad} - \frac{e^*}{c} \mathfrak{A} \right)^2 \Psi(r) + \frac{\partial F_{s0}(|\Psi|^2)}{\partial \Psi^*} = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (2)$$

$$i = - \frac{i e^* \hbar}{2m} (\Psi^* \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{2m} \mathfrak{A} \Psi^* \Psi \quad (3)$$

und durch eine Grenzbedingung gegeben, nach der die Normalkomponente des Stromes an der Oberfläche des Supraleiters verschwindet. $\Psi(r)$ ist die Quasiwellenfunktion der supraleitenden Elektronen; $|\Psi|^2$ wird als Dichte der supraleitenden Elektronen interpretiert. F_{s0} ist die freie Energie des Supraleiters ohne Magnetfeld. GINSBURG und LANDAU geben für F_{s0} eine Entwicklung für kleine $|\Psi|^2$ an, die also in der Nähe der Sprungtemperatur gültig ist. Die Theorie wurde von BARDEEN⁹ auf niedrigere Temperaturen verallgemeinert. Wir müssen uns hier auf die Umgebung der Sprungtemperatur beschränken, da die Ableitung von GORKOV von nur dort gültigen Näherungen Gebrauch macht. Der Zusammenhang mit der mikroskopischen Theorie zeigt, daß $\Psi(r)$ bis auf räumlich konstante Faktoren gegeben wird durch⁷

$$\Psi(r) \propto \langle \psi(r) \psi(r) \rangle. \quad (4)$$

Dabei ist $\psi(r)$ das quantisierte Elektronenfeld, und die Mittelung erfolgt über die große kanonische Gesamtheit.

Die Quantisierung des magnetischen Flusses folgt in elementarer Weise aus der Tatsache, daß für die Quasiwellenfunktion Ψ die übliche quantenmechanische Beziehung (3) für den Strom gilt. Wir betrachten die Gln. (2) und (3) in dem Gebiet des supraleitenden

¹ B. S. DEEVER u. W. M. FAIRBANK, Phys. Rev. Letters 7, 43 [1961].

² R. DOLL u. M. NÄBAUER, Phys. Rev. Letters 7, 51 [1961].

³ N. BYERS u. C. N. YANG, Phys. Rev. Letters 7, 46 [1961].

⁴ L. ONSAGER, Phys. Rev. Letters 7, 50 [1961].

⁵ J. M. BLATT, Phys. Rev. Letters 7, 82 [1961].

⁶ W. L. GINSBURG u. L. D. LANDAU, J. exp. theor. Phys. 20, 1064 [1950].

⁷ L. P. GORKOV, J. exp. theor. Phys. 36, 1918 [1959].

⁸ J. BARDEEN, L. N. COOPER u. J. R. SCHRIEFFER, Phys. Rev. 108, 1175 [1957].

⁹ J. BARDEEN, Phys. Rev. 94, 554 [1954].